平均曲率ベクトル平行曲面 その過去・現在、そして未来 第三部

釼持 勝衛

東北大学

東京　秋葉原, 2 October　2016

応用 (1)

Theorem (Hirakawa, Geo.Ded. 2006)

$\mathbb{S}^2$： 種数 0 のコンパクトリーマン面　そのとき、 $\mathbb{S}^2$ から $\mathbb{C}P^2$ (そしてまた $\mathbb{C}H^2$) への非ゼロ平均曲率ベクトル平行はめ込みは存在しない

証明. $\exists$ M 上の正則 2 次微分 s.t. $\sin\alpha \neq 0$ の近傍で $\bar{c}\phi^2$ (Ogata). リーマン・ロッホ定理より, $c \equiv 0$. そのとき、平川の分類表より結論を得る

応用 (2)

Theorem (K. TMJ, 2016)

$\mathbb{T}^2$ 種数 1 のコンパクトリーマン面. そのとき、$\mathbb{T}^2$ から $\mathbb{C}P^2$ (又は $\mathbb{C}H^2$) へのはめ込みが *pmc*, $(H \neq 0)$ $\Longleftrightarrow$ 像が平坦、全実型.

証明. $(8ba - 3\rho \sin^2 \alpha)\phi^2$ は $\mathbb{T}^2$ 上の正則 2 次微分 (Fetcu). リーマン・ロッホの定理より上記 2 つの 2 次対称形式は定数係数. 我々の主定理にこれらの情報を加えると、はめ込みの第一、二基本形式が決定される。

$\mathbb{C}P^2$ (と $\mathbb{C}H^2$) 内の平坦全実型トーラスは 大仁田, Urbano により 1986 年独立に決定されている

曲面族　$\Sigma(c_1) \subset \mathbb{C}H^2[-12]$　$(0 < c_1 < \infty)$

$$
\begin{aligned}
a(u) &:= \frac{4-(9-4c_1)\sin^2 u - 9c_1\sin^4 u - \sqrt{-1}\sqrt{2(-8+9\sin^2 u)(1+c_1\sin^2 u)}}{4(1+c_1\sin^2 u)+\sqrt{-1}\sqrt{2(-8+9\sin^2 u)(1+c_1\sin^2 u)}} \\
\xi(u) &:= 2^{5/2}\int^u \frac{\cot t}{\sqrt{(-8+9\sin^2 t)(1+c_1\sin^2 t)}}dt \\
c(u) &:= \sqrt{\frac{c_1}{2(9+8c_1)}}(-8+9\sin^2 u)e^{\sqrt{-1}\xi(u)}, \quad \alpha := u
\end{aligned}
$$

$\lim_{c_1\to 0}\Sigma(c_1) =$ 平川曲面,　$\lim_{c_1\to\infty} =$ K.-Zhou (2000).
$\sin^2 u = 8/9$ と置くと、$\alpha =$ 一定 で Chen 曲面.

曲面族　$\Sigma(c_1) \subset \mathbb{C}H^2[-12]$　$(0 < c_1 < \infty)$

$$a(u) := \frac{4-(9-4c_1)\sin^2 u - 9c_1\sin^4 u - \sqrt{-1}\sqrt{2(-8+9\sin^2 u)(1+c_1\sin^2 u)}}{4(1+c_1\sin^2 u)+\sqrt{-1}\sqrt{2(-8+9\sin^2 u)(1+c_1\sin^2 u)}}$$

$$\xi(u) := 2^{5/2}\int^u \frac{\cot t}{\sqrt{(-8+9\sin^2 t)(1+c_1\sin^2 t)}}dt$$

$$c(u) := \sqrt{\frac{c_1}{2(9+8c_1)}}(-8+9\sin^2 u)e^{\sqrt{-1}\xi(u)}, \quad \alpha := u$$

$\lim_{c_1\to 0}\Sigma(c_1) =$ 平川曲面,　$\lim_{c_1\to\infty} =$ K.-Zhou (2000).
$\sin^2 u = 8/9$ と置くと、$\alpha =$ 一定 で Chen 曲面.

・　曲面族 $\{\Sigma(c_1)\ (0 < c_1 < \infty)\}$ は $\mathbb{C}H^2[-12]$ 内で知られているすべての pmc 曲面を含む.

板書 ($\Sigma(c_1)$ の一意性)

実余次元 ≥ 3

$\overline{M}^n[4\rho]$：複素 n 次元複素空間形、一定正則断面曲率 4ρ
$x : M \to \overline{M}^n[4\rho]$: pmc

Theorem (Fetcu, JDG, 2012)

上の設定のもとで, $n \geq 3$ と仮定．　そのとき、
(1) $x(M^2)$ は全実で擬臍的 *(totally real pseudo-umbilical)* または、

(2) $x(M^2) \subset {}^{\exists}\overline{M_0^r}[4\rho] \subset \overline{M}^n[4\rho]$, $\quad r \leq 5$

場合 (1): B. Opozda, On totally real surfaces with parallel mean curvature vector, Bull. Soc. Math. Belg. 40(1988), 2, ser. B, 207-244. 種数 0 の場合を詳しく研究.

Fetcu(2012) では引用されていない。

場合 (2): $x(M^2) \subset {}^{\exists}\overline{M_0^r}[4\rho] \subset \overline{M}^n[4\rho], \quad r \leq 5$

$r = 2$ の場合の解析は第二部で終了

問題　$r = 3, 4, 5$ の場合？　具体的に、$\mathbb{C}P^3$, $\mathbb{C}H^3$ 内に非自明な pmc 曲面はあるか？

Fetcu(2012) は非自明な曲面の存在についてはふれていない。

プロジェクト：　$r = 3$ の場合、第２、３基本形式が α の関数と仮定して、構造方程式に解あるかどうか調べること

注意　上の Fetcu の結果は外側空間をより一般にしても成立する

M. Ferreira and R. Tribuzy, Parallel mean curvature surfaces in symmetric spaces, Arkiv Mat. 2014

Parallel mean curvature surfaces in various ambient spaces

定曲率空間の拡張として、実空間形 $\times\mathbb{R}$ を考え、この空間内で cmc , pmc 曲面を研究する

オリジン： U. Abresch, H. Rosenberg, A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Acta Math. 193(204), 141-174.

Parallel mean curvature surfaces in various ambient spaces

定曲率空間の拡張として、実空間形 $\times\mathbb{R}$ を考え、この空間内で cmc , pmc 曲面を研究する

オリジン： U. Abresch, H. Rosenberg, A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Acta Math. 193(204), 141-174.

事実 3 次元等質リーマン空間の等長変換群の次元は $6, 4, 3$

Parallel mean curvature surfaces in various ambient spaces

定曲率空間の拡張として、実空間形 $\times\mathbb{R}$ を考え、この空間内で cmc , pmc 曲面を研究する

オリジン： U. Abresch, H. Rosenberg, A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, Acta Math. 193(204), 141-174.

事実 3 次元等質リーマン空間の等長変換群の次元は $6, 4, 3$

$dim.Iso(\bar{M}^3) = 6 \quad \Rightarrow \quad S^3,\ R^3,\ H^3,$

$dim.Iso(\bar{M}^3) = 4 \quad \Rightarrow S^2\times R,\ R^3,\ H^2\times R,\ S^3_{Berger},\ Nil(3),\ \tilde{S}l(2,R).$

$\bar{M}^3$: 3 次元等質リーマン空間で $dim.Iso(M^3) = 4$ とする.

曲面 $M^2\subset\bar{M}^3$ に対し正則 Hopf 2 次微分の一般化を発見して cmc 理論が研究されている

J. H. S. De Lira, F.A. Vitorio, Surfaces with constant mean curvature in Riemannian products, Quart.J.Math., 61(2010), 33-41,

D. Fetcu and H. Rosenberg, Surfaces with parallel mean curvature in $S^3 \times R$ and $H^3 \times R$, Michigan Math. J. 61(2012), 715-729

From Fetcu-Rosenberg,
" In this paper, we compute the Laplacian of the squared norm of the traceless part ϕ of the second fundamental form σ of a pmc surface in a product space $M^3(c) \times \mathbb{R}$; then, using this Simons-type formula, we characterlize some of these surfaces".

J. H. S. De Lira, F.A. Vitorio, Surfaces with constant mean curvature in Riemannian products, Quart.J.Math., 61(2010), 33-41,

D. Fetcu and H. Rosenberg, Surfaces with parallel mean curvature in $S^3 \times R$ and $H^3 \times R$, Michigan Math. J. 61(2012), 715-729

From Fetcu-Rosenberg,
" In this paper, we compute the Laplacian of the squared norm of the traceless part ϕ of the second fundamental form σ of a pmc surface in a product space $M^3(c) \times \mathbb{R}$; then, using this Simons-type formula, we characterlize some of these surfaces".

D. Fetcu and H. Rosenberg, Surfaces with parallel mean curvature in $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{C}H^n \times \mathbb{R}$, Trans.A.M.S. 366(2014), 75-94

" We introduce a holomorphic quadratic differential on such surfaces. This is then used in order to show that the anti-invariant pmc 2-spheres of a 5-dimensional non-flat cosymplectic space forms of product type are actually the embedded rotational spheres $S_H^2 \subset \bar{M}^2 \times \mathbb{R}$ of Hisang and Pedrosa, where...."

Codimension reduction theorem, and "Uniqueness results"

D. Fetcu and H. Rosenberg, Surfaces with parallel mean curvature in Sasakian space forms, Math. Ann. 362(2015), 501-528

“We prove a codimension reduction theorem. We introduce two holomorphic quadratic differentials on anti-invariant such surfaces and use them to obtain classification theorems.”

問題　$\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$, $\mathbb{C}H^n \times \mathbb{R}$ と Sasakian space forms 内の pmc 曲面の局所構造を解析し、”非自明” な曲面の存在を示せ

存在定理がある論文：

(1) F. Torallbo and F. Urbano Surfaces with parallel mean curvature vector in $S^2 \times S^2$ and $H^2 \times H^2$, Trans. A. M. S. 2011

(2) D. Fetcu, A classification result for helix surfaces with parallel mean curvature in product spaces, Arkiv Mat. 2015

(3) J. Orjuela and R. Tojeiro, Umbilical surfaces of products of space forms, TMJ, 2016

$|H| =$ constant

$M^2 \subset \bar{M}^N(c)$ s.t. $|H| =$ constant $\neq 0$, but $\nabla^{\perp} H \neq 0$.

$|H| =$ constant

$M^2 \subset \bar{M}^N(c)$ s.t. $|H| =$ constant $\neq 0$, but $\nabla^{\perp} H \neq 0$.

先駆的研究：K. Enomoto, Umbilical points on surfaces in R^N, Nagoya M. J. 100(1985), 135-143

$|H| =$ constant

$M^2 \subset \bar{M}^N(c)$ s.t. $|H| =$ constant $\neq 0$, but $\nabla^\perp H \neq 0$.

先駆的研究：K. Enomoto, Umbilical points on surfaces in R^N, Nagoya M. J. 100(1985), 135-143

S. T. Yau (AJM, 1974) Theorem 5. Let M^2 be a topological two sphere or a complete non-negative curved surface immersed in a four-dimensional constant curved manifold N. If M^2 has constant mean curvature, either M^2 is flat, totally umbilic or M^2 is a minimal surface.

$|H| =$ constant

$M^2 \subset \bar{M}^N(c)$ s.t. $|H| =$ constant $\neq 0$, but $\nabla^\perp H \neq 0$.

先駆的研究：K. Enomoto, Umbilical points on surfaces in R^N, Nagoya M. J. 100(1985), 135-143

S. T. Yau (AJM, 1974) Theorem 5. Let M^2 be a topological two sphere or a complete non-negative curved surface immersed in a four-dimensional constant curved manifold N. If M^2 has constant mean curvature, either M^2 is flat, totally umbilic or M^2 is a minimal surface.

J. H. Eschenburg and R. Tribuzy (Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1988) p.189 "We will show by a **counterexample** that in general this is wrong (see Appendix). So, the question remains open whether there exists a non-trivial immersion of S^2 into Q^4_c with $|H| =$ const $\neq 0$".

要約

(1) $\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}H^2$ 内の pmc spheres, pmc tori を決定した (Hirakawa, K.)

(2) $\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}H^2$ 内の pmc of a general type のモジュライを決定した (K. 2016)

(3) Fetcu-Rosenberg に関係して、$\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$, $\mathbb{C}H^n \times \mathbb{R}$ と Sasakian space forms 内の pmc 曲面の局所構造を解析し、" 非自明 " な曲面の存在を示せという問題を紹介した。

要約

(1) $\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}H^2$ 内の pmc spheres, pmc tori を決定した (Hirakawa, K.)

(2) $\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}H^2$ 内の pmc of a general type のモジュライを決定した (K. 2016)

(3) Fetcu-Rosenberg に関係して、$\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$, $\mathbb{C}H^n \times \mathbb{R}$ と Sasakian space forms 内の pmc 曲面の局所構造を解析し、" 非自明 " な曲面の存在を示せという問題を紹介した。

(3) の研究には、第二部での方法が有効であると思われる。

要約

(1) $\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}H^2$ 内の pmc spheres, pmc tori を決定した (Hirakawa, K.)

(2) $\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}H^2$ 内の pmc of a general type のモジュライを決定した (K. 2016)

(3) Fetcu-Rosenberg に関係して、$\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$, $\mathbb{C}H^n \times \mathbb{R}$ と Sasakian space forms 内の pmc 曲面の局所構造を解析し、”非自明”な曲面の存在を示せという問題を紹介した。

(3) の研究には、第二部での方法が有効であると思われる。

(4) 更なる一般化として、$|H| = \text{constant}, \nabla^{\perp} \neq 0$ なる曲面に関して、Yau と Eschenburg-Tribuzy の 2 論文を紹介した。

要約

(1) $\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}H^2$ 内の pmc spheres, pmc tori を決定した (Hirakawa, K.)

(2) $\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}H^2$ 内の pmc of a general type のモジュライを決定した (K. 2016)

(3) Fetcu-Rosenberg に関係して、$\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}$, $\mathbb{C}H^n \times \mathbb{R}$ と Sasakian space forms 内の pmc 曲面の局所構造を解析し、"非自明" な曲面の存在を示せという問題を紹介した。

(3) の研究には、第二部での方法が有効であると思われる。

(4) 更なる一般化として、$|H| =$ constant, $\nabla^\perp \neq 0$ なる曲面に関して、Yau と Eschenburg-Tribuzy の 2 論文を紹介した。

終